

饱和砂土动静力特性的网格自适应数值模拟

邵 琪^{1,2}, 唐小微^{1,2}

(1. 大连理工大学 海岸与近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 大连理工大学 土木工程学院 岩土工程研究所, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 在有限元数值计算平台上, 建立了一套基于后验误差评估和 Delaunay 三角剖分的网格自适应方案, 针对饱和砂土静力受压和地震液化的特性进行模拟。验证了超收敛单元片回归 (SPR) 误差评估中原用于四边形单元的双线性回归函数在用于三角形单元网格时的适用性和可靠性; 在饱和砂土动、静力算例中, 网格自适应计算获得的变形、应变、超孔压比等的变化规律与常规有限元结果趋势一致。随着网格的再生成, 参考点的位移和全域的平均相对误差逼近精确值。对于初始网格, 讨论了合理的自适应程度并应用于地震液化的自适应数值模拟中, 也对 Delaunay 三角剖分实施了一些改进。最终证明该自适应方案在提高计算效率的同时, 亦可以保证计算所需的精准度。

关 键 词: 后验误差评估; Delaunay 三角剖分; 网格自适应; 饱和砂土; 静力受压; 地震液化

中图分类号: TU 435

文献标识码: A

Numerical simulation of static and dynamic behaviors of saturated sand by an adaptive mesh scheme

SHAO Qi^{1,2}, TANG Xiao-wei^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;

2. Institute of Geotechnical Engineering, School of Civil Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract: Based on the finite element method with a posterior error estimation and the Delaunay triangulation, an adaptive mesh scheme is set up to simulate the saturated sand behaviors when being compressed statically and when being liquefied during earthquakes. The bilinear recovered function, usually being used for quadrilateral elements in superconvergent patch recovery (SPR) error estimation, is confirmed to be available and reliable for triangular element mesh. In both the static and dynamic examples of saturated sand, the changing laws of deformation, strain, excess pore water pressure ratio, etc. due to the adaptive mesh calculation are maintained in the same trend as the normal finite element calculation. The displacement of the reference point is approaching to the exact value as the mesh is regenerated, so is the average relative error of the whole area. The suitable adaptation degree for an initial mesh is discussed and applied to the adaptive numerical simulation of the seismic liquefaction. Also, some improvement for the initial mesh is implemented in the Delaunay triangulation. This adaptive mesh scheme is proved to improve calculating efficiency, and to ensure the desired accuracy as well.

Key words: posterior error estimation; Delaunay triangulation; adaptive remesh; saturated sand; static compression; seismic liquefaction

1 引 言

有限元数值方法作为一种高效、便捷的近似计算手段, 能够结合土体复杂的本构关系, 展示出固、液、气各相的特征, 被广泛地应用于岩土工程的各个领域。然而, 在模拟饱和砂土地震液化的过程中, 由于动力加速度瞬间起伏很大, 土体变形剧烈, 特

别是场地完全液化之后, 数值网格扭曲畸形多有发生, 极易导致计算结果不精确甚至中止计算。因此, 网格自适应方法可以在数值模拟中自行判断并改善局部网格, 使计算过程平滑完整, 获得可靠精度的数值结果。

网格自适应方法最早由 Babuska^[1]提出, 分为 3 类: h 型、 p 型和 h - p 型。 p 型方法旨在计算中不断

收稿日期: 2013-07-16

基金项目: 国家高技术研究发展计划 863 资助项目(No. 2012AA112510)。

第一作者简介: 邵琪, 男, 1983 年生, 博士研究生, 主要从事地震液化数值模拟、网格自适应方法等方面的研究。E-mail: looker05@hotmail.com

通讯作者: 唐小微, 男, 1968 年生, 博士, 副教授, 博导, 主要从事土动力学、海洋土动力学等方面的研究。E-mail: tangxw@dlut.edu.cn

提高单元插值函数或近似解多项式的阶数,以精确求解,但刚度阵也随之调整,易使计算复杂化。大量实践表明, h 型方法可以减小单元尺寸、增加网格密度,大大改善计算结果,但一致性加密的网格往往不够经济,而局部加密的 h 型网格自适应方法在改善数值结果的同时也能节省计算资源,因此,应用广泛。

h 型网格加密技术可大致分为两种,一种是以单元几何形状的相似形分裂为基础的网格细化。刘春梅等^[2]针对弹性力学问题设计了一种基于局部松弛的多重网格法,局部加密单元不需要满足内节点性质。李立等^[3]围绕黏性流动问题,采用粗网格细分法,对由伴随自适应探测器标记位置的网格进行加密,生成具有较好网格分辨率的非结构自适应网格。另一种是以节点重构为基础的网格再生成,目前最常用的是基于Delaunay三角剖分的自适应技术。杜玉龙^[4]着重研究了自下而上在三维空间进行Delaunay网格划分的原理和步骤,经过网格形状、尺寸控制,生成了三维的局部加密网格。张文明等^[5]基于Delaunay三角剖分选取最优节点对特征集中区域进行局部加密,获得更高精确度和高效性的自适应网格。

本文基于Delaunay三角剖分技术,以基于SPR的后验误差评估作为自适应判据,在饱和砂土动静力数值模拟中进行网格自适应分析,以期获得更精确可靠的变形、应变、超孔压比等结果。

2 网格自适应方案

整个方案的实施步骤如下:采用Delaunay三角剖分方法划分初始网格;对每一有限元分析步后计算域中的应变场进行误差评估,标记出需要加密的单元;在已标记区域的适当位置加入节点,依据Delaunay三角剖分规则再生成全域网格并平滑;新旧网格之间进行数据传递;继续下一个分析步的计算。

2.1 后验误差评估

作为一种自适应判据,后验误差评估是常用的可标记出需加密单元的指示器。1978年,由Babuska^[6]首先提出了一种考虑数值结果局部余量(residual based)的后验误差评估方法,可根据单元或单元片上的余量值,采用能量范数评价局部误差。但这类方法需要重构有限元平衡方程,程序化操作较为复杂。后来,Zienkiewicz和Zhu^[7-9]提出了一种基于SPR(superconvergent patch recovery,超收敛单元片回归)技术的回归值误差评估方法,利用当前分析步的有限元结果获得接近真实解的回

归值来计算误差。文中将针对应变,采用该方法评估误差,其表达式为

$$e_e = \bar{\varepsilon} - \varepsilon_h \quad (1)$$

式中: e_e 为应变的误差; $\bar{\varepsilon}$ 为应变回归值; ε_h 为应变的有限元解。根据不同的回归函数,该方法可分别应用于线性^[10]和非线性^[11]问题。

2.1.1 构造SPR回归函数

虽然有限元方法得到的是应变场的近似解,但在定义域内的某些点上却是精确解,这些点被称为超收敛点^[12]。文中使用的二维一阶三节点三角形单元的高斯点就是超收敛点,位于单元的质心位置^[8]。SPR技术的关键就是在以节点 i 为核心的局部单元片上将这些超收敛点用最小二乘法拟合出一个应变场,场内各点的应变值即为回归值。

SPR的应变回归函数如下

$$\bar{\varepsilon} = Pa \quad (2)$$

式中: a 为一系列待定系数; P 为构造多项式的函数基,对于一阶单元有两种形式:

$$\left. \begin{aligned} P &= [1 \quad x \quad y] && \text{(线性)} \\ P &= [1 \quad x \quad y \quad xy] && \text{(双线性)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

一般来说,式(3)中线性函数基用于三节点三角形单元,双线性函数基用于四节点四边形单元。

计算域内各节点的应变回归值可由其对应单元片上的回归函数算得。各单元的应变回归值则由节点值插值获得,

$$\bar{\varepsilon}_e = N\bar{\varepsilon}_i \quad (4)$$

式中: $\bar{\varepsilon}_e$ 为单元应变回归值; $\bar{\varepsilon}_i$ 为节点应变回归值; N 为单元 e 的插值函数。

2.1.2 相对误差计算

式(1)算得的是绝对误差,无法直观、明确地表征计算域内误差分布,因此,这里引入 η_i 表示单元 i 的相对误差,

$$\eta_i = \frac{\|e_e\|_i}{\sqrt{\|e_e\|^2 + \|\varepsilon_h\|^2} / n_e} \times 100\% \quad (5)$$

式中: $0 < \eta_i < 1$; n_e 为单元总个数; $\|e_e\|_i$ 为单元 i 绝对误差的 L_2 范数,表达式为

$$\|e_e\|_i = \left(\int_{V_i} e_{ei}^T e_{ei} dv / V_i \right)^{1/2} \quad (6)$$

式中: dv 为单元内任意小的区域; V_i 为单元 i 的定义域; e_{ei} 为单元 i 应变的绝对误差;累计各单元的误差即得整域的应变绝对误差的 L_2 范数 $\|e_e\|$,表达式为

$$\|e_e\| = \left(\sum_{i=1}^{n_e} \|e_e\|_i^2 \right)^{1/2} \quad (7)$$

同理,也可以获得整域的应变有限元解为

$$\|\epsilon_h\| = \left(\sum_{i=1}^{n_e} \|\epsilon_{h_i}\|^2 \right)^{1/2} \quad (8)$$

式中: $\|\epsilon_{h_i}\|$ 为单元 i 有限元应变值的 L_2 范数, 可如式 (6) 般算得。

再引入一个可表征整个计算域平均相对误差的量 η_{avg} , 作为阈值标记出需加密的单元。

$$\eta_{\text{avg}} = \frac{\|\epsilon\|}{\sqrt{\|\epsilon_e\|^2 + \|\epsilon_h\|^2}} \times 100\% \quad (9)$$

式中: $0 < \eta_{\text{avg}} < 1$ 。

2.2 网格局部加密再生成

这里首先采用 Delaunay 三角剖分方法划分初始网格; 再根据误差评估的结果, 标记出超过阈值的单元, 采用外心加点法添加节点; 最后仍然使用 Delaunay 三角剖分方法连接新旧节点形成新的网格, 同时对全域网格进行 Laplace 平滑。

2.2.1 局部加点——外心加点法

向一个符合 Delaunay 三角化的网格中加入任意节点, 属于局部运算^[13]; 按照 Delaunay 剖分准则再生成网格, 可依旧保持初始网格的优良特性^[14-15]。局部加点的常用形式有两种: ①单元最长边中点加点; ②单元外心加点。通常, 由于 Delaunay 三角化的网格中非钝角三角形居多, 所以外心加点多是在该单元或相邻单元域内 (直角三角形除外, 其外心在斜边上) 新增节点, 与最长边中点加点的形式相比, 更符合 Delaunay 空洞算法 (Delaunay 三角化构造网格的基本方法) 的规则。

对计算域边界附近单元的外心加点时, 为避免节点生成在域外造成物理网格出错, 应预判新生节点位置。然而, 有时即使边界单元所加节点在域内, 也会出现钝角三角形, 如图 1 所示, 对计算有影响。因此, 计算中将自动判断边界单元, 不在其内部添加节点, 只依据 Delaunay 空洞算法对这些单元进行被动的剖分。

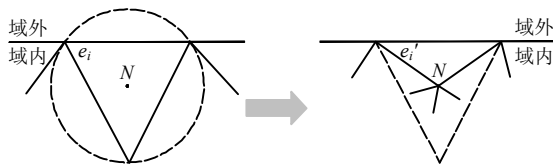


图1 边界单元再生成为钝角三角形

Fig.1 Boundary element regenerated as obtuse triangle

2.2.2 Laplace 平滑

新生成的节点虽然能够满足 Delaunay 三角剖分的基本规则, 却不能完全保证再生成的网格形状饱满如初。为避免生成畸形网格, 必须对节点位置

做适当调整。这里采用经典的“Laplace 平滑”方法: 为每个内部节点构造局部单元片, 将片内核心节点调整到重心位置来优化片内各单元的形状, 如图 2 所示, 内部节点 i 与单元片中周围相连节点 j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) 的位置关系为

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \\ y'_i &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中: x'_i 、 y'_i 为节点 i 的平滑后的坐标; x_j 、 y_j 为与平滑节点相连的节点 j 的坐标; n 为与 i 相连节点的总个数。

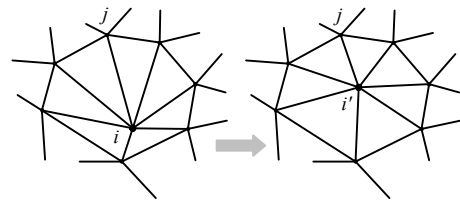


图2 单元片内 Laplace 平滑

Fig.2 Laplace smooth in an element patch

2.3 新旧网格数据传递

饱和砂土适用于弹塑性本构关系, 其应力、应变等状态变量具有很强的非线性和历史依赖性。有限元网格再生成之后, 为了保证这些状态变量的延续性和收敛性, 必须将它们从旧网格传递到新网格, 成为下一个分析步的初始值。常用的数据传递方法有如下两种:

(1) 映射法, 通过局部和整体坐标的几何变换, 将新网格节点所需的状态变量对应着旧网格进行相关计算, 给新网格赋初值, 常见的有逆等参映射法^[16]。该方法适用于等参单元, 计算过程相当复杂, 所以有时计算结果难以收敛。

(2) 插值法, 利用单元插值函数, 先把旧网格高斯点值插值到节点, 再从节点插值到新网格的高斯点, 如图 3 所示。常见的有直接插值法^[17]。

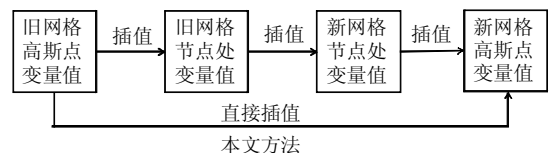


图3 插值法数据传递

Fig.3 Data transfer by interpolating

常规插值方法中从高斯点到节点再到高斯点的传递过程易产生误差, 保持数据连续性方面也不如映射法完善, 不适合加工成型等精密有限元计算, 却完全可以胜任土木类的有限元分析。为了进一步

减少误差, 本文使用直接插值的方法进行新旧网格数据传递: 第 1 步, 在旧网格中, 精准定位新网格各单元的高斯点的位置, 找出包含各高斯点的单元; 第 2 步, 采用单元插值函数, 将旧网格的各状态值插值给新网格的各高斯点, 实现新旧网格的数据传递。对于定位在旧网格多个单元公共边或公共点上的高斯点, 分别插值后取平均即可。

3 数值计算方法

3.1 u - p 格式的控制方程

本文采用了一种耦合有限元-有限差分 (FEM-

$$\left[\begin{array}{cc} [M] + \gamma \Delta t [C]_{|t+\Delta t} + \beta (\Delta t)^2 [K]_{|t+\Delta t} & \overline{K}_V \\ \overline{K}_V^T & A' - \alpha' \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\mathbf{u}}_{N|t+\Delta t} \\ p_{dE|t+\Delta t} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \sum_i^m \alpha'_i p_{dE_i|t+\Delta t} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overline{F}_d|_{t+\Delta t} - \overline{R}_d|_t - [C]_{|t+\Delta t} \left\{ \dot{\mathbf{u}}_{N|t} + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{N|t} \right\} - [K]_{|t+\Delta t} \left\{ \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{N|t} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) (\Delta t)^2 \ddot{\mathbf{u}}_{N|t} \right\} \\ \frac{1}{k \left(\frac{n}{g} - \frac{\gamma \Delta t}{k} \right)} \overline{K}_V^T \left\{ \dot{\mathbf{u}}_{N|t} + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{N|t} \right\} + A' p_{dE|t} \end{array} \right\} \quad (11)$$

式中: $[M]$ 、 $[C]$ 和 $[K]$ 分别为质量阵、阻尼阵和刚度阵; $\mathbf{u}_N$ 为单元中节点位移; p_{dE} 为单元的动态孔隙水压力; $\overline{F}_d$ 为等效外力集合; $\overline{R}_d$ 为土-水相互作用力; 其他参数含义详见文献[20], 不再一一细述。

3.2 饱和砂土的本构模型

本文采用了一种基于非线性移动硬化准则的有效循环弹塑性本构模型^[21]来描述饱和砂土的动静力特性。考虑到应力膨胀和塑性剪切模型中累积应变的依赖性这两者的非线性表达式^[22], 有效应力和应变可写成增量关系。

4 饱和砂土静力算例

4.1 算例信息

对应有围压的静力压缩试验 (如图 4(a)所示),

FDM, finite element method-finite difference method) 的数值计算方法来模拟地震液化。该方法首先由 Akai 等^[18]基于比奥固结理论提出, 再由 Oka 等^[19]基于小应变假定拓展至饱和砂土的液化分析中。在这种 FEM-FDM 耦合方法中, 用有限元法空间离散平衡方程, 用有限差分法空间离散连续方程中孔隙水压力的相关项。在时间域上, 采用 Newmark- β 法离散, 即可获得控制方程的最终形式。该方法可有效降低方程的总自由度, 所得的最终控制方程的矩阵形式也是对称的。

取 $3.2 \text{ m} \times 3.2 \text{ m}$ 的二维正方形计算区域, 域内设定为饱和砂土材料, 材料参数如表 1 所示, 几何边界约束如图 4(b)所示。上表面施加均布荷载 $q = 0 \sim 100 \text{ kN/m}$, 随加载时长而递增, 加载面排水。

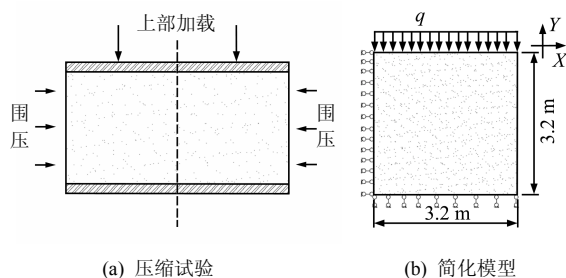


图 4 算例 1

Fig.4 Example one

表 1 算例 1 饱和砂土材料参数

Table 1 Parameters for saturated sand in example one

初始孔隙比	压缩指数	膨胀指数	初始剪切模量比	渗透系数	重力加速度	密度	变相关应力比	破坏应力比	硬化参数	硬化参数	水体积弹性系数	膨胀参数	膨胀参数
e_0	λ	κ	G_0 / σ'_{m0}	$k / (\text{m/s})$	$g / (\text{m/s}^2)$	$\rho / (\text{g/cm}^3)$	M_m	M_f	B_0	B_1	$K_f / (\text{N/m}^2)$	D_0	n
0.992	0.025	0.002 5	1 000	6.9×10^{-6}	9.8	1.83	0.71	0.96	5 500	30	2×10^6	1	3

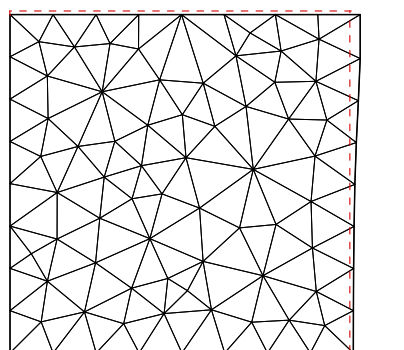
初始网格共计 144 个单元, 分别使用基于式(3)的线性和双线性回归函数的误差评估结果作为自适应判据, 对该算例进行自适应分析, 以验证两种回归函数的可靠性。

4.2 结果展示与分析

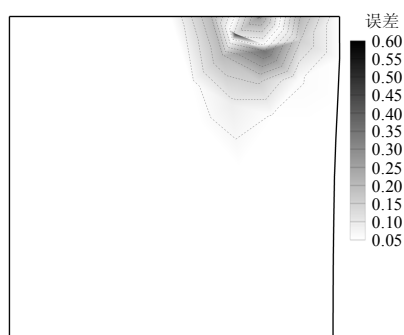
图 5 为初始网格的最终变形图和误差云图, 其中虚线部分是计算域的初始轮廓。

图 6~8 分别为基于线性和双线性回归函数的网格自适应 (AMR, adaptive mesh regeneration) 分析的最终变形图。图 6~8 中自适应的次数 N 是指

在单个完整计算过程中, 依据误差评估对网格进行了 N 次局部网格细化再生成。



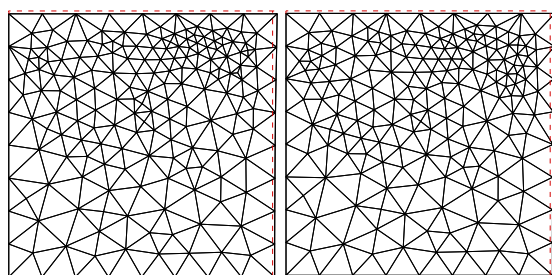
(a) 变形图



(b) 误差云图

图5 初始网格最终变形图和误差云图 (144个单元)

Fig.5 Final deformation and error nephogram of initial mesh (144 elements)

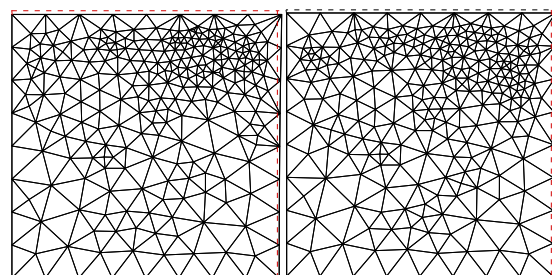


(a) 线性 346 个单元

(b) 双线性 354 个单元

图6 2次自适应的最终变形图

Fig.6 Final deformation of twice AMR

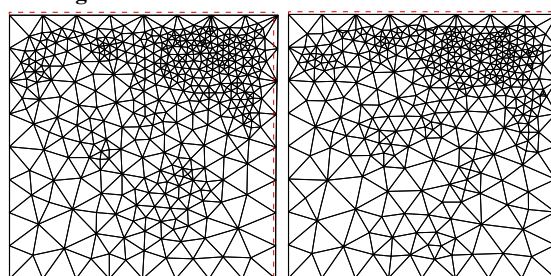


(a) 线性 490 个单元

(b) 双线性 512 个单元

图7 3次自适应的最终变形图

Fig.7 Final deformation of three-time AMR



(a) 线性 826 个单元

(b) 双线性 776 个单元

图8 5次自适应的最终变形图

Fig.8 Final deformation of five-time AMR

整个自适应方案能够根据误差评估准确地定位局部网格细化再生成的区域。考虑到该自适应过程是通过增加局部网格密度来改善计算结果, 则 AMR 与初始网格的最终变形不会完全一致。由于边界上的单元内部不生成新的节点, 只被动地参与分割, 所以这些单元尺寸没有改变; 随着自适应次数的增加, 边界上的单元逐渐变成钝角三角形, 使网格不协调, 可能对计算有一定影响。因此, 比较初始网格和自适应网格的平均相对误差是有必要的, 如图 9、10 所示。

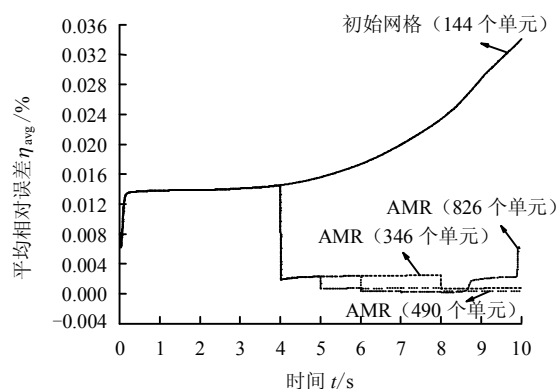


图9 基于线性回归函数的自适应与初始网格的平均相对误差时程曲线

Fig.9 Average relative error in time history of AMR mesh due to linear recovered function and initial mesh

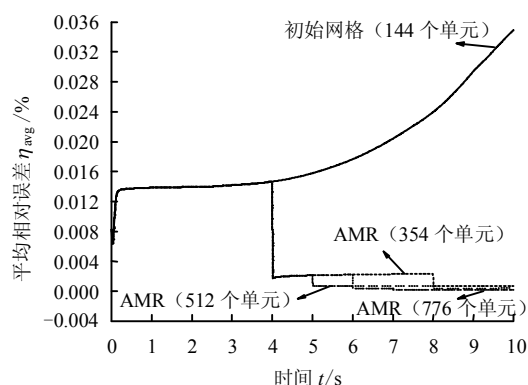


图10 基于双线性回归函数的自适应与初始网格的平均相对误差时程曲线

Fig.10 Average relative error in time history of AMR mesh due to bilinear recovered function and initial mesh

从平均相对误差的时程曲线可以看出, 自适应计算能够有效降低计算域的整体误差, 随着局部网格单元数的增多, 误差值向 0 逼近。这表明, 每个分析步后的平均相对误差是一个动态阈值, 作为自适应判据会不断地提高计算精度。

同时, 基于线性回归函数的自适应计算中, 在 AMR (826 个单元) 计算后程, 误差值略有上浮, 而对应的基于双线性回归函数的 AMR (776 个单元) 计算结果却始终逼近 0 值。这说明, 一方面, 在高次自适应过程中, 双线性的新增单元和节点会少于线性的; 另一方面, 当网格变得疏密有分之后, 双线性的自适应分析能更好地稳定计算精度。因此, 双线性回归函数不仅能比线性回归函数获得更精准的误差评估数据^[23], 也能在自适应分析中更好地改善计算结果。

4.3 对动力算例的设定与改进

鉴于算例 1 的自适应计算结果, 需要对地震液化的自适应数值模拟做一些设定与改进。

首先, 考虑到基于双线性回归函数的误差评估在地震液化数值模拟中能够获得更准确的结果^[24], 这里对算例 2 采用基于双线性回归函数的自适应方案进行分析。

其次, 由于边界单元只能被动剖分, 其尺寸基

表 2 算例 2 土体材料参数

Table 2 Parameters for soil in example two

土体名称	初始孔隙比 e_0	压缩指数 λ	膨胀指数 κ	初始剪切模量比 G_0/σ'_{m0}	渗透系数 $k/(m/s)$	重力加速度 $g/(m/s^2)$	密度 $\rho/(g/cm^3)$	变相关应力比 M_m	破坏应力比 M_f	硬化参数 B_0	硬化参数 B_1	水体积弹性系数 $K_f/(N/m^2)$	膨胀参数 D_0	膨胀参数 n
饱和砂土	0.856	0.006 4	0.005 5	829	1.9×10^{-5}	9.8	1.86	0.91	1.17	1 600	16	2×10^6	5	1.2
干土	0.856	0.006 4	0.005 5	829		9.8	1.75	0.91	1.17	3 000	0	0	0	0.0

数值计算使用如图 12 所示的粗网格作为初始网格, 饱和砂土区域是 Delaunay 三角剖分生成的网格, 用于自适应分析; 为消除边界效应, 在模型两侧分别设置了 60 m 的四边形超长单元, 防止在动力模拟过程中边界处网格畸变突起影响计算结果。本文还建立了一个一致性加密的细网格 (如图 13 所示) 与自适应分析结果进行比较。

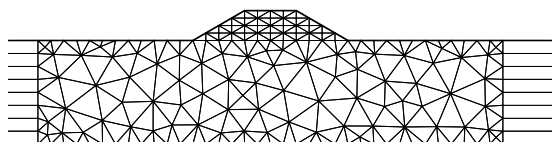


图 12 算例 2 的粗糙网格 (312 个单元)
Fig.12 Coarse meshes for example two (312 elements)

本保持不变, 而多次自适应网格剖分会使边界单元转化成钝角三角形, 影响网格协调性。因此, 生成初始网格时在边界上密布节点, 预先缩小边界单元的尺寸, 构造出由边界到内部逐渐稀疏的初始网格。

最后, 设定合理的网格自适应次数能更好地避免产生畸形单元, 提高网格整体协调性。因此, 算例 2 中只进行 2 次和 3 次的自适应分析。

5 饱和砂土地震液化算例

5.1 算例信息

采用一个堤坝模型作为地震液化的数值算例, 模型尺寸、排水边界和几何约束等如图 11 所示, 其中 A 、 B 均为参考点, 用于考察该处位移、液化程度等。土体材料参数如表 2 所示。

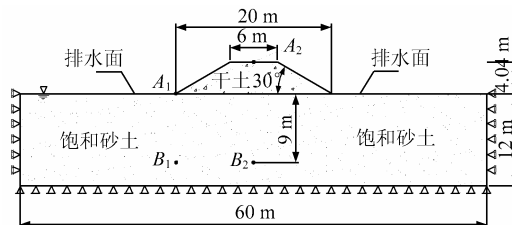


图 11 算例 2
Fig.11 Example two

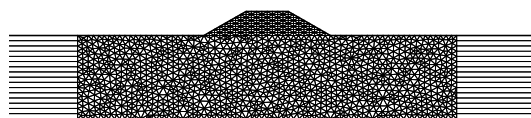


图 13 算例 2 的细网格 (2 682 个单元)
Fig.13 Fine meshes for example two (2 682 elements)

各网格均加载 16 s 的地震波, 加速度时程曲线如图 14 所示。

5.2 结果展示与分析

5.2.1 液化程度与范围

通常, 超静孔隙水压力比 (EPWPR, excess pore water pressure ratio) 被用来表征土体的液化程度。分别考察粗网格 (312 个单元) 和细网格 (2 682 个单元) 中 B_1 和 B_2 处超静孔隙水压力比时程曲线,

如图 15、16 所示。

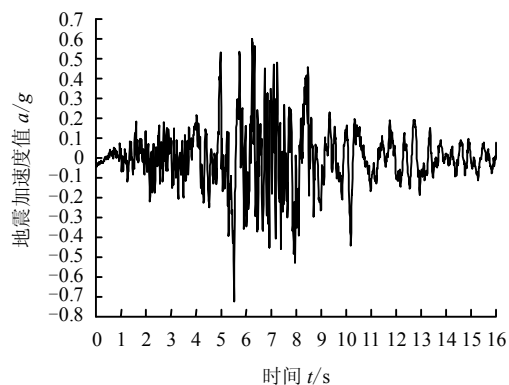


图 14 地震加速度时程曲线

Fig.14 Earthquake acceleration in time history

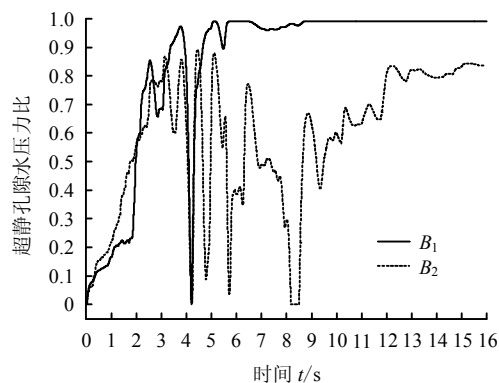


图 15 粗网格中 B_1 和 B_2 处的超静孔隙水压力比时程曲线 (312 个单元)

Fig.15 EPWPR in time history of B_1 and B_2 in the coarse meshes (312 elements)

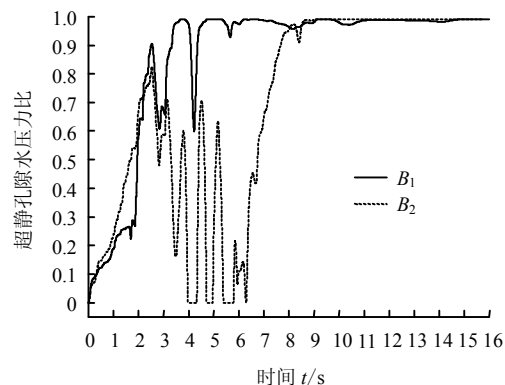
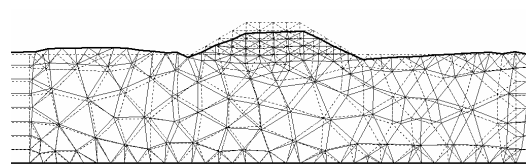


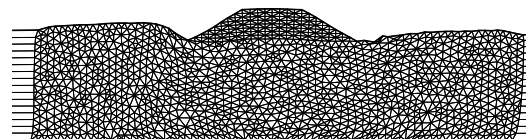
图 16 细网格中 B_1 和 B_2 处的超静孔隙水压力比时程曲线 (2 682 个单元)

Fig.16 EPWPR in time history of B_1 and B_2 in the fine meshes (2 682 elements)

粗、细网格同位置土体的液化趋势和程度大致相同。坝体正下方的土体受上部附加重力影响, 有效应力较高, 因此, 达到液化的时间迟于周围土体。这一现象在细网格计算结果中更为明显。算例的最终网格变形和液化范围如图 17、18 所示。



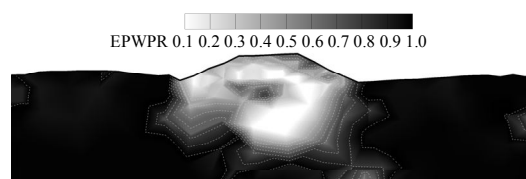
(a) 粗网格 (312 个单元)



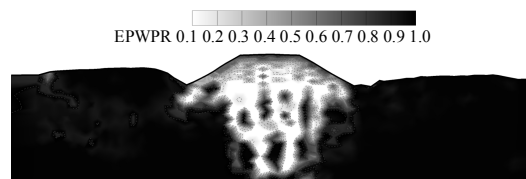
(b) 细网格 (2 682 个单元)

图 17 两种网格的最终变形图

Fig.17 Final deformation of both meshes



(a) 粗网格 (312 个单元)



(b) 细网格 (2 682 个单元)

图 18 两种网格的超静孔隙水压力比云图

Fig.18 Final EPWPR nephogram of both meshes

最终液化范围与超静孔隙水压力比时程曲线相互印证, 当周围饱和砂土已经大范围液化时, 坝体下方土体仍有部分未能液化; 液化导致坝体大幅沉降 (变形图 17 中虚线部分表示初始网格轮廓), 因此, 后文将考察坝脚 (A_1) 和坝顶 (A_2) 的竖向位移。在计算地震液化沉降时, 坝体下方土体网格变形剧烈、甚至扭曲, 造成了一定的误差, 则由评估系统捕捉并给出云图, 如图 19 所示。综合图 17(a)、图 18(a)与图 19, 可以发现在液化程度较高、变形较大的区域, 误差值也相对较高。

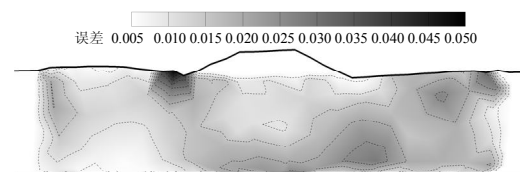


图 19 粗网格的最终相对误差云图 (312 个单元)

Fig.19 Final relative error nephogram of the coarse meshes (312 elements)

5.2.2 网格自适应计算结果

根据第 4.3 节的小结与设定, 这里以粗网格作为初始网格, 分别在计算过程中进行 2 次和 3 次自适应分析, 局部细化再生成的最终网格图如图 20 所示。

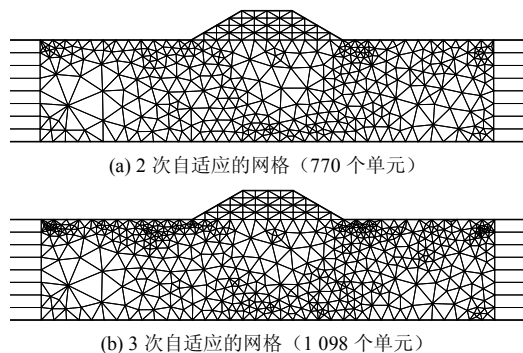


图 20 自适应网格
Fig.20 Adaptive meshes

参考图 19 的粗网格误差评估结果, 可以发现该自适应方案在原误差较大的区域进行网格局部细化再生成, 随着自适应次数的增加, 局部网格密度不断增加。两种自适应网格的最终变形图和超静孔隙水压力比云图如图 21、22 所示。

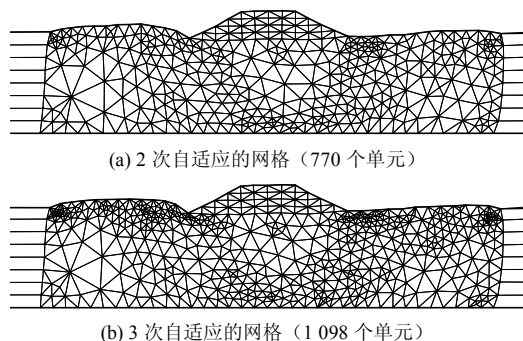


图 21 自适应网格变形图
Fig.21 Deformation of adaptive meshes

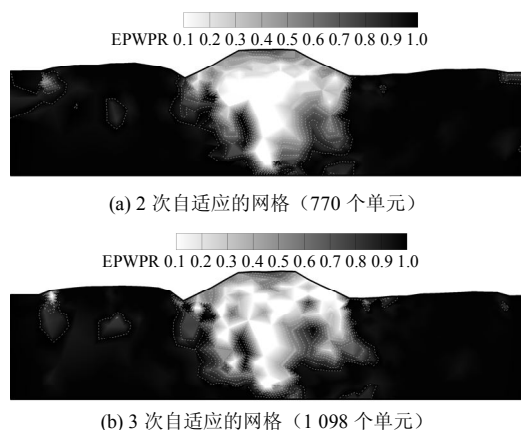


图 22 自适应网格超静孔隙水压力比云图
Fig.22 EPWPR nephograms of adaptive meshes

自适应网格保持了图 17(a)所示粗网格 (312 个单元) 的变形趋势; 随着局部网格的加密, 其变形幅度越来越接近细网格 (2 682 个单元)。同时, 其液化的范围和程度也随着局部细化的加深而更接近细网格 (2 682 个单元) 的结果。

5.2.3 自适应与常规计算结果的比较

算例 2 中地震液化造成了坝体大幅沉陷, 因此, 首先通过考察坝脚 (A_1) 和坝顶 (A_2) 的竖向位移来验证自适应结果的准确性。 A_1 和 A_2 两点的竖向位移时程曲线如图 23、24 所示。

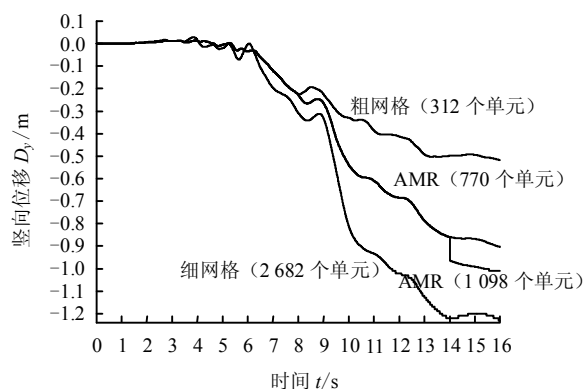


图 23 A_1 竖向位移时程曲线
Fig.23 Vertical displacements of A_1 in time history

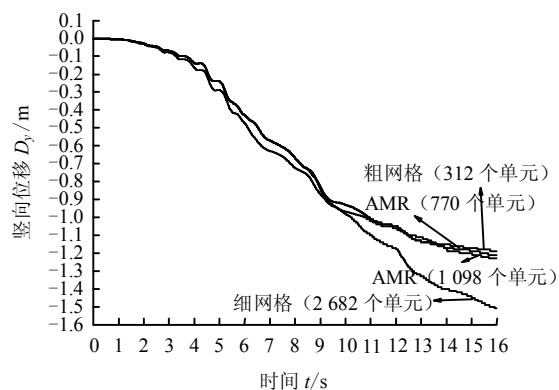


图 24 A_2 竖向位移时程曲线
Fig.24 Vertical displacements of A_2 in time history

从位移曲线可以看出, 自适应的分析结果不仅与粗网格具有相同的趋势, 而且随着再生成单元数的增加, 向细网格结果靠近。从而证明了网格自适应的数值结果比粗网格的常规结果更精确。

在逼近精确解的同时, 自适应计算也能有效地提高整个数值计算的精度, 这一点可以从自适应分析与常规有限元分析的平均相对误差的比较中看出, 如图 25 所示。

以平均相对误差作为动态阈值进行的网格自适应分析可以大幅降低常规计算的误差; 随着自适应

中再生单元数目的增多, 整个计算域的精度也向着更准确的水平靠近。

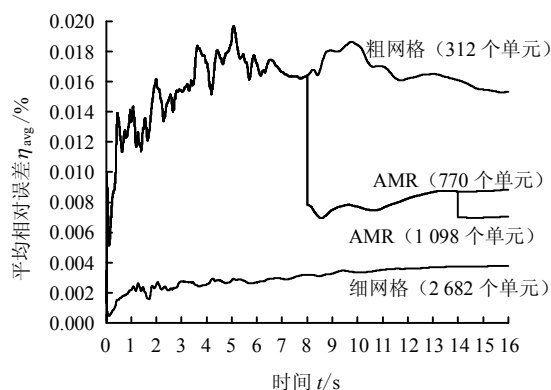


图 25 各网格平均相对误差时程曲线

Fig.25 Average relative errors in time history in all meshes

6 结 论

(1) 双线性回归函数应用于三角形网格的自适应分析时, 不仅可以获得与线性回归函数趋势一致的结果, 而且在网格已经变得疏密不同时仍能更好地指导自适应计算, 保证计算精度更稳定、更精准。

(2) 以各分析步的平均相对误差作为自适应判据的动态阈值, 可以大幅降低计算误差, 获得更精确的逼近值, 具有一定的高效性。

(3) 在有限元动力数值模拟中, 网格自适应分析能够节省计算资源, 既保持了初始网格常规计算的地震液化发展趋势, 也能在网格变形和液化发展程度上更接近精确解; 从数据结果 (如位移) 和计算精度上, 都向着更精确的数据结果靠近。

(4) 采用边界致密、内部稀疏的网格建立地震液化数值算例, 有利于节点重构网格再生成时遵循 Delaunay 三角化的准则。同时, 选择合理的自适应次数, 不需要产生过多的新增单元和节点, 却能保证自适应分析获得更精确的逼近值, 提高了计算效率、保证了计算精度。

参 考 文 献

[1] BABUSKA I, ZIENKIEWICZ O C, GAGO J, et al. Accuracy estimates and adaptive refinement in finite element computations[M]. Chichester, West Sussex: Wiley, 1986.

[2] 刘春梅, 肖映雄, 舒适, 等. 弹性力学问题自适应有限元及其局部多重网格法[J]. 工程力学, 2012, 29(9): 60—67.

LIU Chun-mei, XIAO Ying-xiong, SHU shi, et al. Adaptive finite element method and local multigrid

method for elasticity problems[J]. **Engineering Mechanics**, 2012, 29(9): 60—67.

[3] 李立, 白文, 梁益华. 基于伴随方程方法的非结构网格自适应技术及应用[J]. 空气动力学学报, 2011, 29(3): 309—316.

LI Li, BAI Wen, LIANG Yi-hua. An adjoint-based method for unstructured mesh adaptation and its applications[J]. **Acta Aerodynamica Sinica**, 2011, 29(3): 309—316.

[4] 杜玉龙. 三维 Delaunay 局部加密网格划分在行波管模拟软件中的应用[D]. 成都: 电子科技大学, 2011.

[5] 张文明, 刘彬, 徐刚. 三维实体网格自适应划分算法[J]. 机械工程学报, 2009, 45(11): 266—270.

ZHANG Wen-ming, LIU Bin, XU Gang. Three dimensional entity mesh generation algorithm[J]. **Journal of Mechanical Engineering**, 2009, 45(11): 266—270.

[6] BABUSKA I, RHEINBOLDT C. A-posteriori error estimates for the finite element method[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1978, 12(10): 1597—1615.

[7] ZIENKIEWICZ O C, ZHU J Z. The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1992, 101(1—3): 207—224.

[8] ZIENKIEWICZ O C, ZHU J Z. The superconvergent patch recovery (SPR) and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1992, 33(7): 1331—1364.

[9] ZIENKIEWICZ O C, ZHU J Z. The superconvergent patch recovery (SPR) and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1992, 33(7): 1366—1382.

[10] ZIENKIEWICZ O C, BOROOMAND B, ZHU J Z. Recovery procedures in error estimation and adaptivity. Part I: Adaptivity in linear problems[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1999, 176(1—4): 111—125.

[11] ZIENKIEWICZ O C, BOROOMAND B, ZHU J Z. Recovery procedures in error estimation and adaptivity. Part II: Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1999, 176(1—4): 127—146.